Grupo 4

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Integrantes:

1. Jhan Broner Espinoza Castro
2. Marita Yuceli Barturen Diaz
3. José Dilmer Olivera Burga
4. Michael Dinner Torres Álvarez
5. Jorge Luis Gómez Rios

Docente:

Mgtr. Susana Caballero Bardales

Ciclo/Aula:

VIII - E

2026

Grupo 4

ACTIVIDAD FORMATIVA Nº6
PARABOLAS

Desarrollo y Soluciones

Actividad Sincrónica

1. **Problema:** Reduzca a la forma ordinaria la siguiente ecuación: $3x^2 + 3y^2 + 12x - 42y + 51 = 0$, determine cuál es su lugar geométrico obtenido y, determine los elementos.

a. **Identificación preliminar:** Tenemos tanto x2 como y2 con coeficientes idénticos y positivos, lo que nos indica desde el inicio que se trata de una circunferencia.

b. **Simplificación:** Dividimos toda la ecuación entre 3 para dejar los términos cuadráticos con coeficiente

$$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 17 = 0$$

c. **Agrupación y completar cuadrados:** Agrupamos los términos con x y los términos con y, y pasamos el término independiente al otro lado:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 14y) = -17$$

Completamos los cuadrados sumando la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado en ambos lados:

$$= (x^2 + 4x + (\frac{4}{2})^2) + (y^2 - 14y + (\frac{-14}{2})^2) = -17 + (\frac{4}{2})^2 + (\frac{-14}{2})^2$$

$$(x^2 + 4x + (\frac{4}{2})^2) + (y^2 - 14y + (\frac{-14}{2})^2) = -17 + (\frac{4}{2})^2 + (\frac{-14}{2})^2$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 14y + 49) = -17 + 4 + 49$$

Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos:

$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

d. **Resultados:**

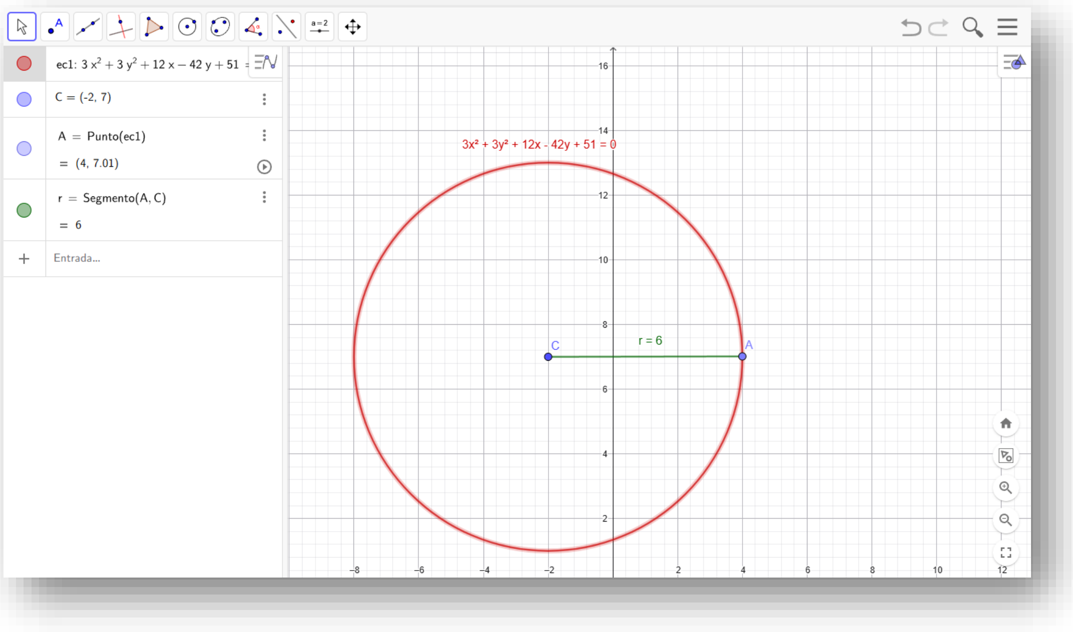
Lugar geométrico: Es una **circunferencia**.

Forma ordinaria: $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$

Elementos: * Centro (h, k): $C(-2,7)$

Radio (r): Como r^2=36, entonces r=6.

e. **Demostración en Geogebra:**



2. **Problema:** Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(7,6) y B(−5,2). Hallar su ecuación y su gráfica.

   a. **Hallar el Centro:** El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro formado por los puntos A y B.

$$x_c = \frac{7 + (-5)}{2}$$

$$x_c = \frac{2}{2}$$

$$x_c = 1$$

$$y_c = \frac{6 + 2}{2}$$

$$y_c = \frac{8}{2}$$

$$y_c = 4$$

El **Centro** es C(1,4).

   b. **Hallar el Radio:** El radio es la distancia desde el centro C(1,4) hasta cualquiera de los extremos, por ejemplo, A(7,6).

$$r^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A A - y_C)^2$$

$$r^2 = (7-1)^2 + (6-4)^2$$

$$r^2 = (6)^2 + (2)^2$$

$$r^2 = 36 + 4$$

$$r^2 = 40$$

$$r = \sqrt{40}$$

$$r = 6.3245\ldots$$

El **Radio** es $r = \sqrt{40} \cong 6.32$.

c. **Resultados:**

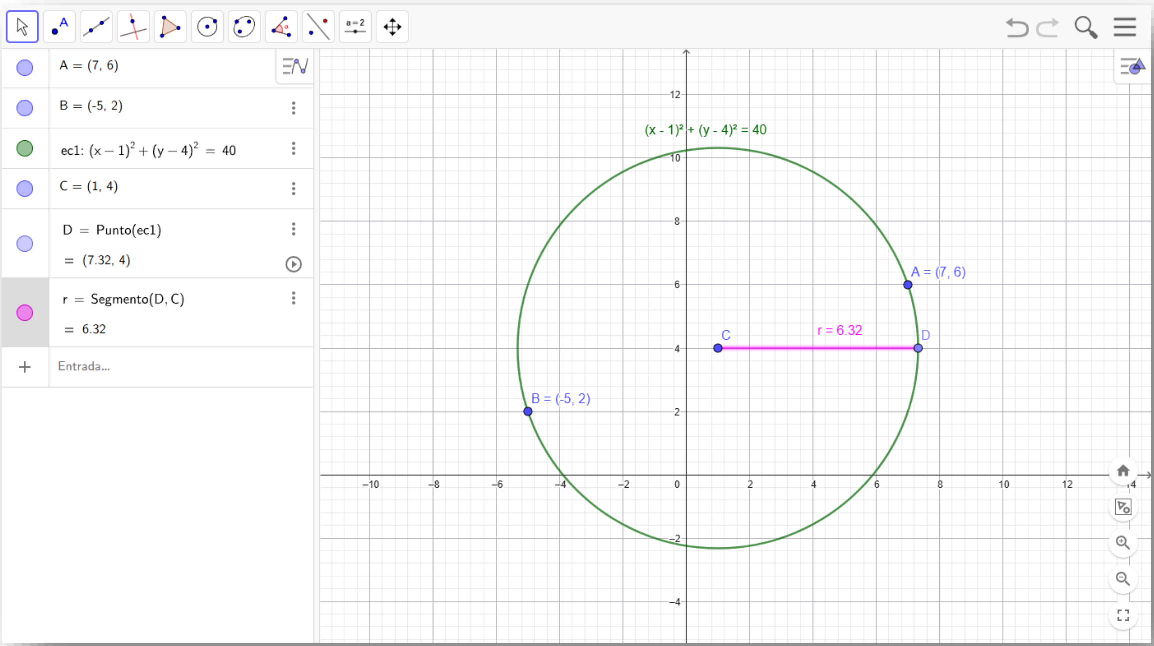
Ecuación ordinaria: Sustituyendo el centro y el radio al cuadrado en la fórmula ordinaria:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 40$$

Ecuación general:

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 23 = 0.$$

d. **Demostración en GEOGEBRA:**



3. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(5;\ -3)$ y que es tangente al eje "y".

Para hallar la ecuación de la circunferencia, necesitamos dos datos clave: el $centro\ (h,k)\ y\ el\ radio\ r$. Ya tenemos el centro: $C(5,-3)$, lo que significa que $\boldsymbol{h\ =\ 5\ y\ k\ =\ -3}$.

Paso 1: Encontramos el radio

Cuando una circunferencia es tangente al eje "y", la distancia desde el centro hasta ese eje es exactamente igual al valor absoluto de la coordenada "x" del centro.

- ✓ Coordenada "x" del centro = 5
- ✓ Por lo tanto, el radio es $r =\ 5$

Paso 2: Formamos la ecuación ordinaria

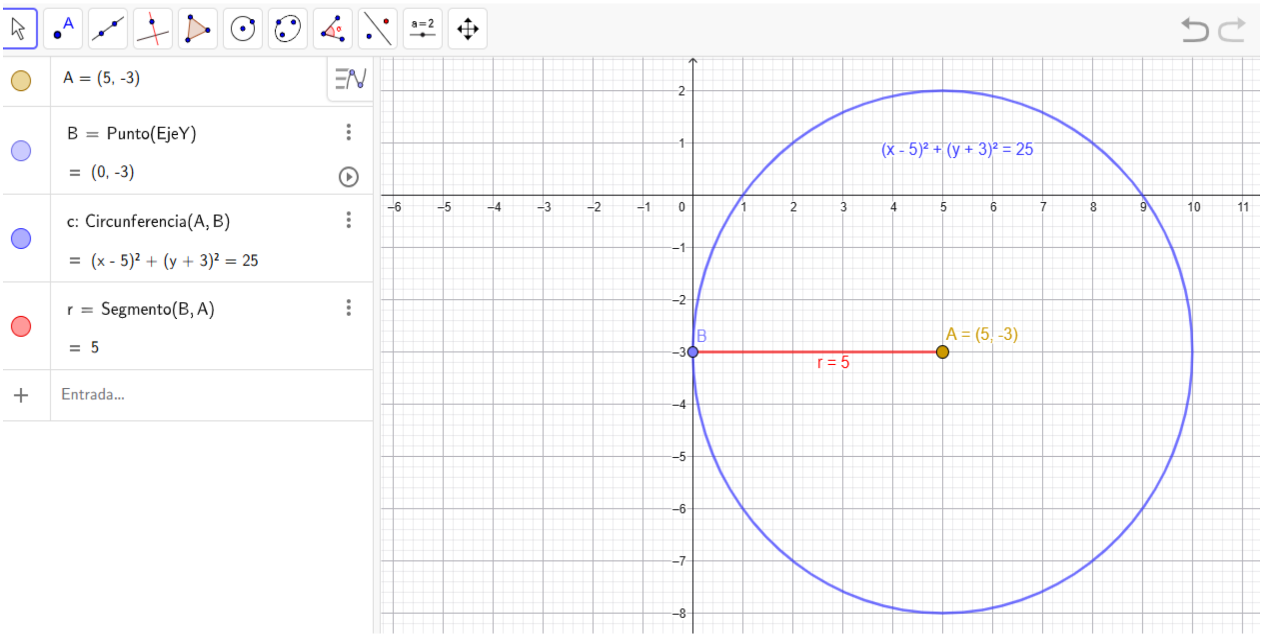
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- ✓ Sustituyendo los valores de $\boldsymbol{h\ =\ 5\ , k\ =\ -3\ y\ r = \ 5}$

$$(x-5)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Paso 2: Grafica de la circunferencia



4. **Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (2; -1) y que es tangente a la recta $5x - y + 4 = 0$**

El enunciado ya nos da el centro: $C(2, -1)$, lo que significa que $\boldsymbol{h = 2}$ ***y*** $\boldsymbol{k = -1}$

Paso 1: **Encontramos el radio**

$$\boldsymbol{r = \frac{|AX_1 + BY_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Identificamos los valores:

- ✓ Punto Centro: $x_1 = 2$; $y_1 = -1$
- ✓ Recta: $A = 5; B = -1; C = 4$

Sustituyendo en la formula:

$$\boldsymbol{r = \frac{|5(2) + (-1)(-1) + 4|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}}}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{|10 + 1 + 4|}{\sqrt{25 + 1}}}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{15}{\sqrt{26}}}$$

Como en la ecuación de la circunferencia utilizaremos el radio al cuadrado (r^2), lo elevamos de una vez:

$$r^2 = \left(\boldsymbol{\frac{15}{\sqrt{26}}}\right)^{\boldsymbol{2}}$$

$$r^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{26}}\right)^{\boldsymbol{2}}$$

$$r^2 = \frac{225}{26}$$

$$r^2 = 8.65$$

$$r = 2.94$$

Paso 2: **Formamos la ecuación ordinaria:**

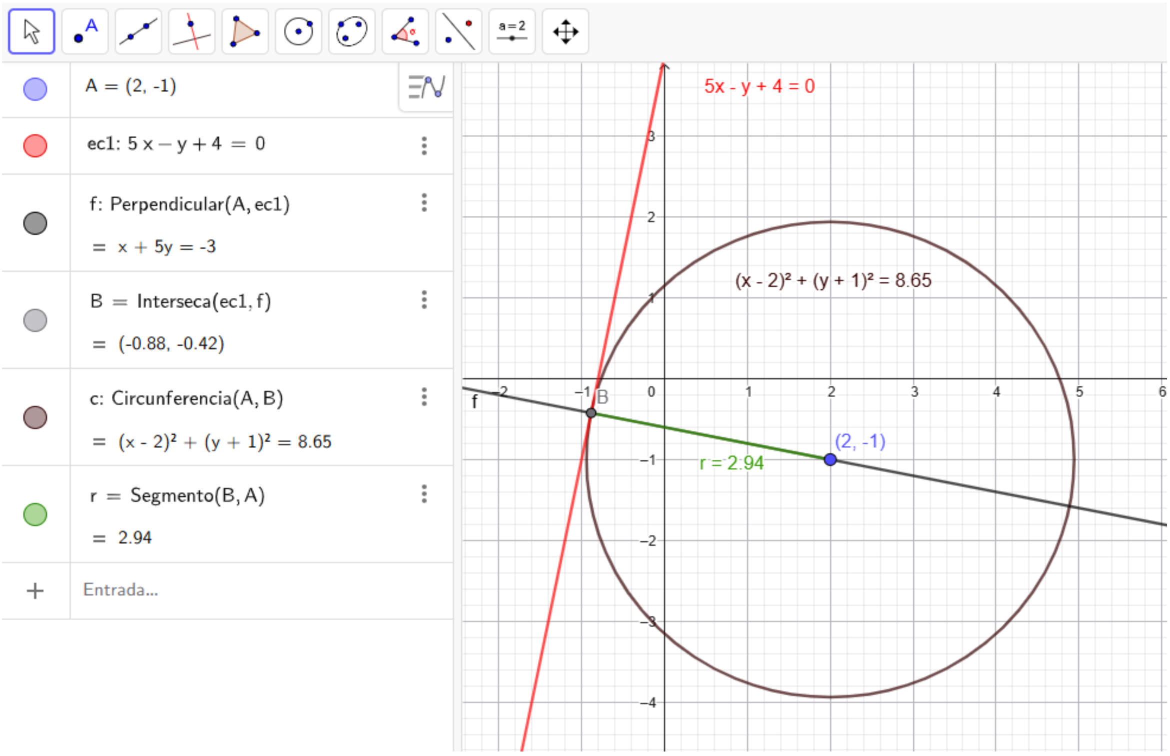
La estructura de la ecuación ordinaria es: $\boldsymbol{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$

Sustituimos nuestros datos: $\boldsymbol{h = 2}$; $\boldsymbol{k = -1}$ ***y*** $\boldsymbol{r^2 = \frac{225}{26}}$

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = \frac{225}{26}$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{225}{26}$$

Paso 3: **Grafica de la circunferencia**



5. **Dada la ecuación general de la parábola: $x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$ y encontrar: Las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y su gráfica.**

Para resolver este ejercicio, primero debemos llevar la ecuación general de la parábola a su forma ordinaria o canónica. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ donde **(h, k)** será el vértice y **P** la distancia focal.

Paso1: Transformamos a la ecuación ordinaria

$$\boldsymbol{x^2 + 6x - 12y + 57 = 0}$$

$$x^2 + 6x = 12y - 57$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 12y - 57 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + \frac{36}{4} = 12y - 57 + \frac{36}{4}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 12y - 57 + 9$$

$$(x+3)^2 = 12y - 48$$

$$(x+3)^2 = 12y - 48$$

$$(x+3)^2 = 12(y-4)$$

Paso2: Encontramos el vértice (V) y el Foco (F)

Al comparar nuestra ecuación: $\boldsymbol{(x+3)^2 = 12(y-4)}$ con la forma general $\boldsymbol{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$ obtenemos:

- ✓ **Vértice (h, k):**

$$-h = 3 \to h = -3$$
$$-k = -4 \to k = 4$$
$$\boldsymbol{Vertice = V(-3, 4)}$$

- ✓ **Foco (P):**

$$\boldsymbol{4p = 12 \to p = \frac{12}{4} = 3}$$
$$\boldsymbol{p = 3}$$

Como P es positivo ($\boldsymbol{p > 0}$), la parábola abre hacia arriba

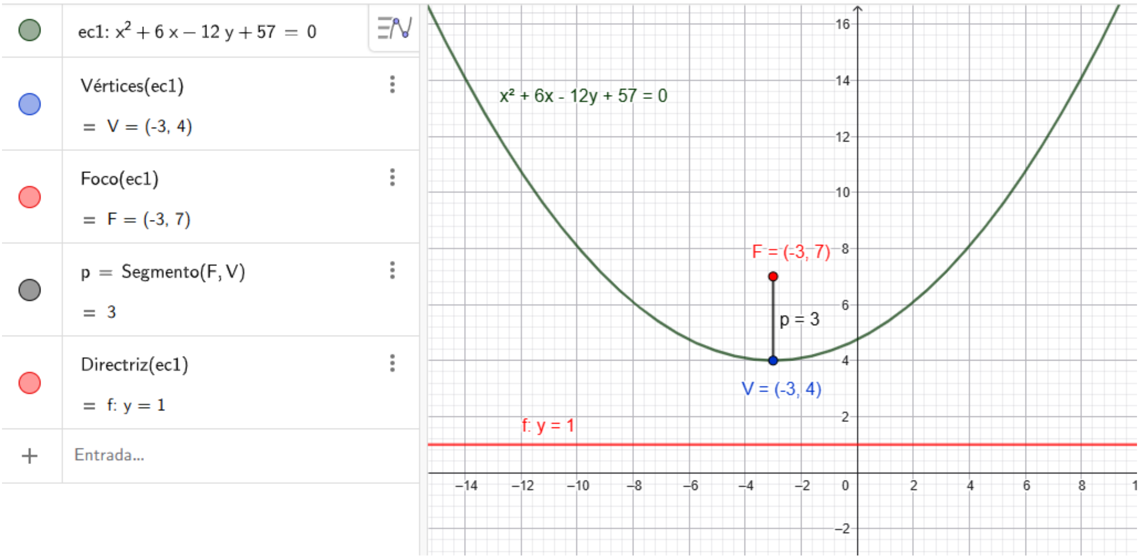
Paso3: Encontramos coordenadas del foco (F)
Al ser una parábola vertical que abre hacia arriba, el foco se encuentra sumando la distancia $\boldsymbol{p}$ a la coordenada "y" del vértice: $\boldsymbol{F(h, k + p)}$.

$$\boldsymbol{F(h, k + p)}$$
$$F(-3, 4 + 3)$$
$$F(-3, 7)$$

Paso 3: Encontramos la directriz

$$\boldsymbol{y = k - p}$$
$$\boldsymbol{y = 4 - 3}$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Paso3: Graficamos en GeoGebra



6. Encontrar la ecuación ordinaria, general y la gráfica de la parábola, que tiene como datos: $V(-2,3), F(1,3)$. Elabora su gráfica

Verificamos los daros que tenemos

- ✓ **Vértice** $V(-2,3)$: $h = -2, k = 3$
- ✓ **Foco** $(1,3)$

Paso 1: Determinar la orientación y el parámetro (P)

Observamos que ambos puntos tienen la misma coordenada en y $(y = 3)$. Esto significa que el eje de simetría es una línea horizontal, por lo tanto, se trata de una parábola horizontal.

La distancia entre el vértice y el foco nos da el parámetro "P"

- ✓ Como el foco está a la derecha del vértice (la coordenada X pasa de -2 a 1), la parábola abre hacia la derecha y **P** será positivo.

$$\boldsymbol{P = x_f - h}$$
$$P = 1 - (-2)$$
$$P = 1 + 2)$$
$$P = 3$$

Paso 2: Ecuación Ordinaria

$$\boldsymbol{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

Sustituyendo los valores de $h = -2, k = 3$ y $p = 3$

$$\boldsymbol{(y-3)^2 = 4(3)(x-(-2))}$$

$$\boxed{\boldsymbol{(y-3)^2 = 12(x+2)}}$$

Paso 3: Ecuación general

Para obtener la forma general $\boldsymbol{x^2}$ **+ Dx + Ey + F = 0** , desarrollamos el binomio al cuadrado e igualamos a cero:

$$\boldsymbol{(y-3)^2 = 12(x+2)}$$

$$y^2 + 2y(3) + 3^2 = 12(x+2)$$

$$y^2 + 6y + 9 = 12(x + 2)$$

$$y^2 + 6y + 9 = 12x + 24$$

$$y^2 - 12x + 6y + 9 - 24 = 0$$

$$\boxed{y^2 - 12x + 6y + 15 = 0}$$

Paso 4: Encontramos el lado recto y la directriz

- ✓ **Lado Recto (LR):** Mide la apertura total de la parábola a la altura del foco.

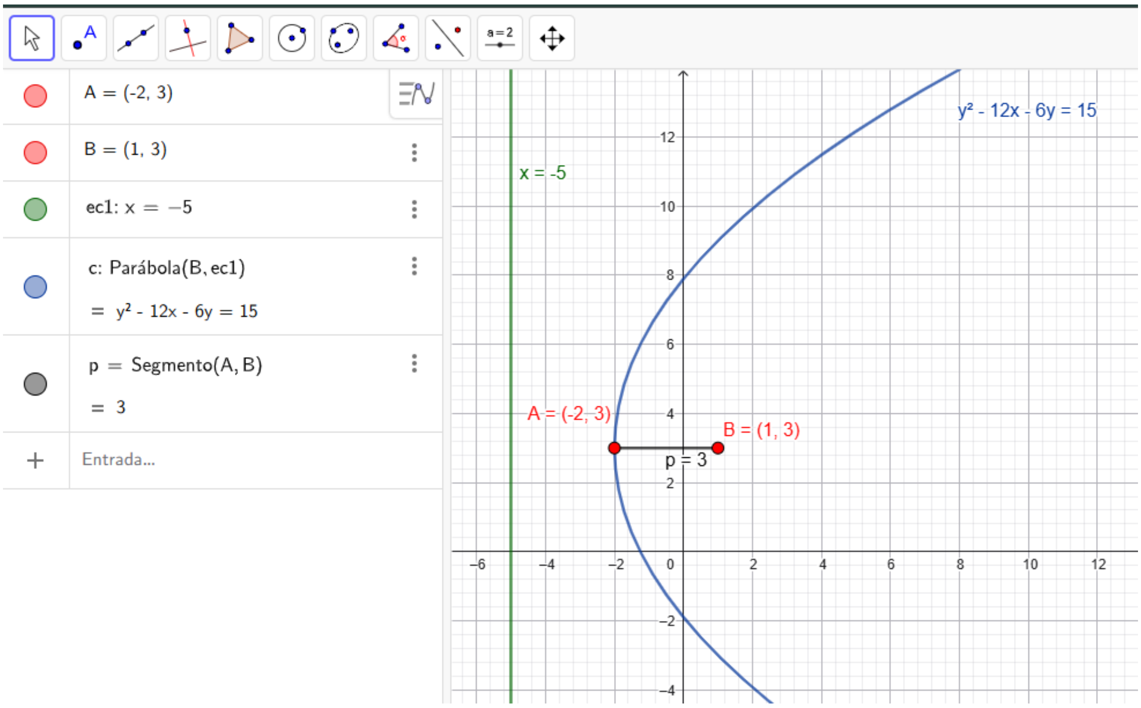
$$\boldsymbol{LR} = |4P|$$
$$\boldsymbol{LR} = |4(3)| = \mathbf{12}$$

Esto significa que desde el foco $F(1,3)$ nos moveremos 6 unidades hacia arriba y 6 unidades hacia abajo para encontrar los extremos del lado recto: $los\ puntos\ P1(1,9)\ y\ P2(1,-3)$.

- ✓ **Directriz:** Es una línea vertical situada a una distancia p a la izquierda del vértice**.**

$$\boldsymbol{x = h - p}$$
$$\boldsymbol{x = -2 - 3}$$
$$\boldsymbol{x = -5}$$

Paso 5: Grafica de la parábola:



7. Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$, representa una parábola, halla las coordenadas del vértice y el foco, la ecuación de sus directriz, la longitud de sus lado recto y su gráfica.

Paso 1: Aislar los términos de la variable cuadrática

Como el término cuadrático contiene a la variable $x(4x^2)$,sabemos que se trata de una parábola de eje vertical (abre hacia arriba o hacia abajo). Vamos a dejar los términos con x en el lado izquierdo y pasar los demás términos al lado derecho de la ecuación:

$$4x^2 - 20x = 24y - 97$$

Paso 2: Factorizar el coeficiente del término cuadrático

Para poder completar el cuadrado de manera sencilla, el coeficiente de x^2debe ser 1. Factorizamos el 4 en el lado izquierdo:

$$4(x^2 - 5x) = 24y - 97$$

Paso 3: Completar el cuadrado perfecto

Para completar el cuadrado dentro del paréntesis, tomamos el coeficiente de x(que es -5), lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Sumamos $\frac{25}{4}$ dentro del paréntesis. Al hacer esto, realmente estamos sumando $4 \times \frac{25}{4} = 25$ en el lado izquierdo de la ecuación. Por lo tanto, para mantener la igualdad, también debemos sumar 25 en el lado derecho:

$$4\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = 24y - 97 + 25$$

Simplificamos el lado derecho:

$$4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 24y - 72$$

Paso 4: Obtener la forma ordinaria o canónica

Ahora, factorizamos el lado derecho sacando como factor común el coeficiente de y (que es 24):

$$4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 24(y - 3)$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 4 para despejar el término cuadrático:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{24}{4}(y - 3)$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3)$$

Demostración: Esta última expresión corresponde exactamente a la forma ordinaria de una parábola vertical: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Al haber reducido la ecuación general a esta estructura canónica, queda demostrado que **la ecuación representa una parábola**.

Paso 5: Determinar los elementos de la parábola

A partir de la ecuación ordinaria $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6(y-3)$, comparamos término a término para hallar sus componentes:

1. **Vértice (h, k):**

$$h=\frac{5}{2}=2.5$$
$$k=3$$

Vértice: $V\left(\frac{5}{2},3\right)$ o en decimales V (2.5, 3).

2. **Valor del parámetro p:**
El término que multiplica a la variable lineal es 4p, por lo tanto:

$$4p=6\Longrightarrow p=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1.5$$

Como p > 0 y la parábola es vertical, sabemos que **abre hacia arriba**.

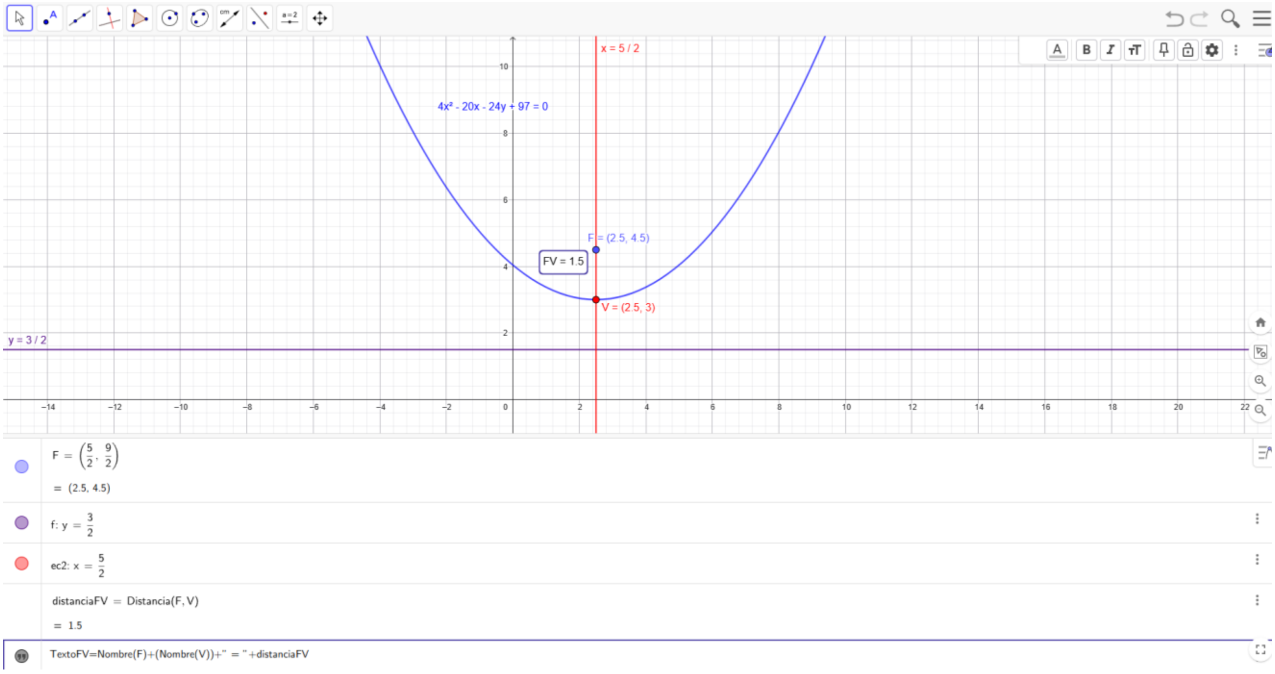
3. **Longitud del Lado Recto (LR):**
   - El lado recto es el valor absoluto de 4p:
$$\mathrm{LR}=|4p|=6$$

4. **Coordenadas del Foco (F):**
   - Al ser una parábola vertical que abre hacia arriba, el foco se encuentra una distancia p por encima del vértice: F(h, k + p).
$$F\left(\frac{5}{2},3+\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$$
   - En coordenadas decimales: **F(2.5, 4.5)**.

5. **Ecuación de la Directriz:**
   - La directriz es una línea horizontal situada una distancia p por debajo del vértice: y = k - p.

$$y=3-\frac{3}{2}\Longrightarrow y=\frac{3}{2}$$

   - En forma decimal o general: **y = 1.5** o **2y - 3 = 0**.



8. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $(\frac{3}{2},0)$ y de la recta x= $-\frac{3}{2}$

Paso 1: Identificar los elementos

Recordemos:

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan de:

- un punto fijo → **Foco**
- una recta fija → **Directriz**

Entonces:

- Foco:

$$F\ (\frac{3}{2},0)$$

- Directriz:

$$X = -\frac{3}{2}$$

Paso 2: Hallar el vértice

El vértice está exactamente a la mitad entre el foco y la directriz.

Como ambos están sobre el eje x :

- foco en $x = \frac{3}{2}$
- directriz en $x = -\frac{3}{2}$

El punto medio es:

$$x = \frac{\frac{3}{2} + (-\frac{3}{2})}{2} = 0$$

y además:

y=0

Entonces el vértice es:

V(0,0)

Paso 3: Determinar el valor de p

La distancia del vértice al foco es:

$$p = \frac{3}{2}$$

La parábola abre hacia la derecha porque el foco está a la derecha del vértice.

Paso 4: Usar la forma estándar

Forma estándar de una parábola horizontal:

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

Sustituimos:

$$p = \frac{3}{2}$$

Entonces:

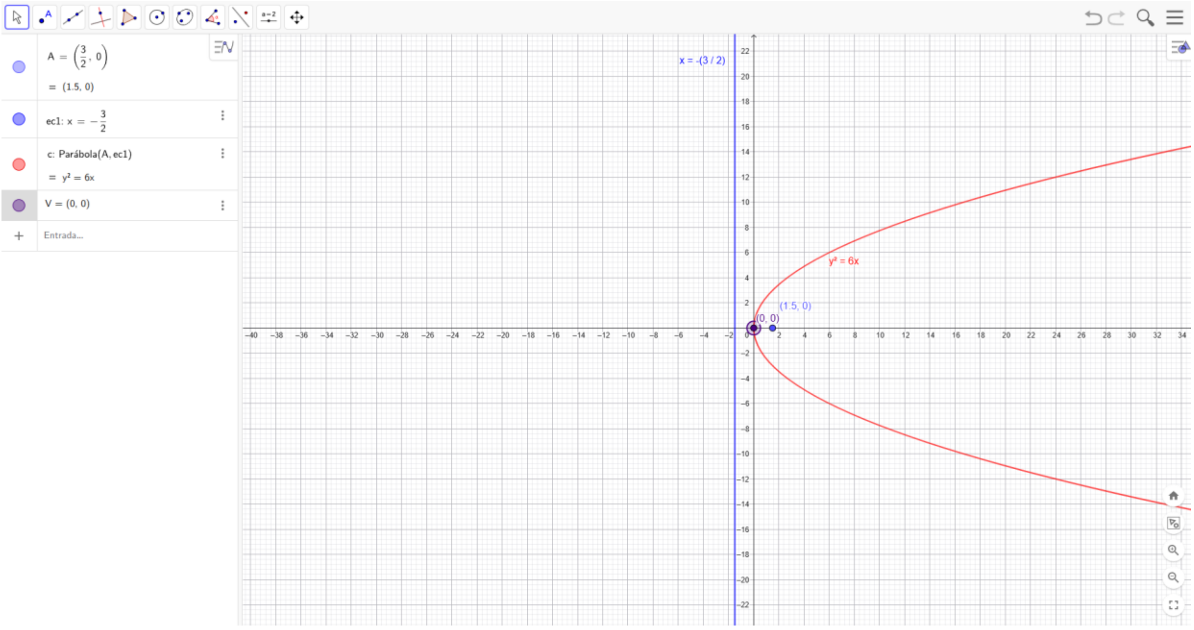
$$4p = 4\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

Por lo tanto:

$$y^2 = 6x$$

Ecuación del lugar geométrico

$$y^2 = 6x$$



9. Obtenga la ecuación de la parábola de eje focal en el eje de ordenadas, vértice en el origen de coordenadas y tal que el punto A (−3/2, −3) le pertenece.

La parábola tiene eje focal en el **eje de ordenadas**, por eso su forma es:

$$x^2 = 4py$$

donde:

$$V(0,0)$$

El punto que pertenece a la parábola es:

$$\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$$

Reemplazamos en la fórmula:

$$x^2 = 4py$$
$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 4p(-3)$$

Calculamos:

$$\frac{9}{4} = -12p$$

Despejamos p:

$$p = \frac{\frac{9}{4}}{-12}$$

$$p = -\frac{9}{48}$$
$$\boldsymbol{p = -\frac{3}{16}}$$

p=-0.1875

Ahora reemplazamos en la ecuación:

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4\left(-\frac{3}{16}\right)y$$
$$x^2 = -\frac{12}{16}y$$
$$x^2 = -\frac{3}{4}y$$

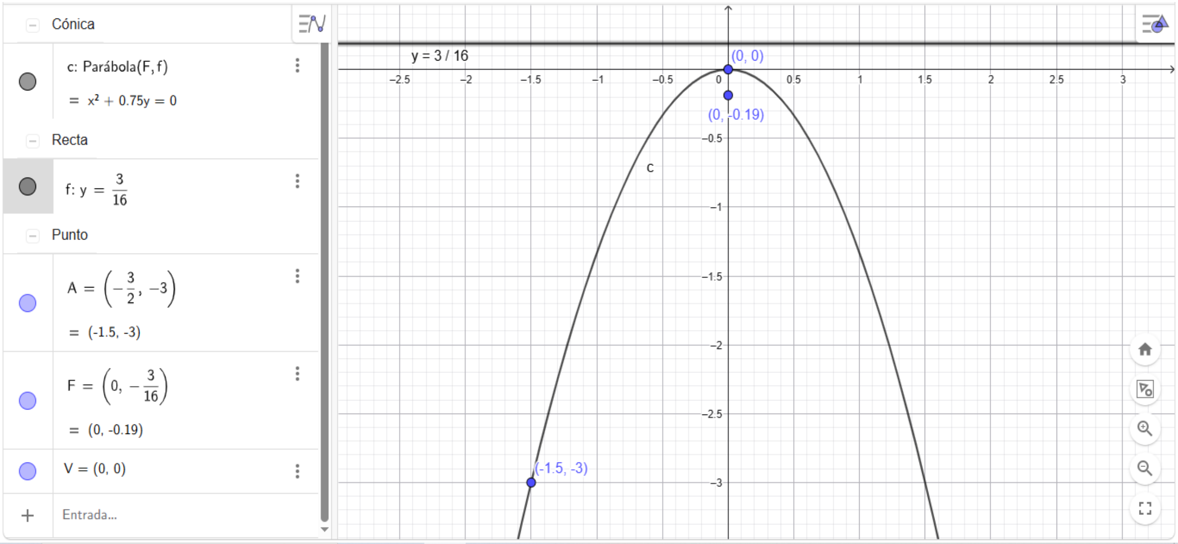
Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$\boxed{x^2 = -\frac{3}{4}y}$$

También puede escribirse como:

$$\boxed{x^2 + \frac{3}{4}y = 0}$$

Comprobación en Geogebra:



10. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (-1, 2) y cuyo foco es $\left(-\frac{5}{4}, 2\right)$

Datos:

$$V(h, k) = (-1, 2)$$
$$F\left(-\frac{5}{4}, 2\right)$$

Como el vértice y el foco tienen la misma ordenada $y = 2$, la parábola tiene eje focal horizontal.

La fórmula es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Donde p es la distancia dirigida del vértice al foco:

$$p = -\frac{5}{4} - (-1)$$
$$p = -\frac{5}{4} + 1$$
$$p = -\frac{5}{4} + \frac{4}{4}$$
$$\boldsymbol{p = -\frac{1}{4}}$$
p=-0.25

Reemplazamos en la fórmula:

$$(y-2)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(x-(-1))$$
$$(y-2)^2 = -1(x+1)$$
$$\boxed{(y-2)^2 = -(x+1)}$$

Forma general:

$$(y-2)^2 = -(x+1)$$
$$y^2 - 4y + 4 = -x - 1$$
$$\boxed{y^2 - 4y + x + 5 = 0}$$

La parábola se abre hacia la **izquierda**, porque: $p < 0$

Comprobación geogebra